שאלה 1

סעיף א: צ"ל:

$$\mathbb{P}\left[|S| > \frac{6C\ln n}{\delta}\right] \le n^{-C/6\delta}$$

לכל קודקוד $v \in V(G)$, ההסתברות שהוא ב-S היא $3C\ln n/\delta n$.

נגדיר לכל $v \in V(G)$ אינדיקטור X_v כך:

$$X_v \coloneqq \begin{cases} 1, & v \in S \\ 0, & v \notin S \end{cases}$$

ונגדיר:

$$X \coloneqq \sum_{v \in V(G)} X_v$$

מתקיים $X = |S|$. ומתקיים:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{v \in V(G)} X_v\right] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}[v \in S] = \sum_{v \in V(G)} \frac{3C\ln n}{\delta n} = n \cdot \frac{3C\ln n}{\delta n} = \frac{3C\ln n}{\delta}$$

אז לפי אי"ש צ'רנוף, מתקיים:

$$\mathbb{P}\big[X > (1+)\mathbb{E}[X]\big] \le \exp\left(-\frac{\mathbb{E}[X]}{3}\right) = \exp\left(-\frac{\frac{3C\ln n}{\delta}}{3}\right) = \exp\left(-\frac{C\ln n}{\delta}\right) = \exp\left(-\frac{C}{\delta}\ln n\right) = e^{\ln n^{-\frac{C}{\delta}}} = n^{-C/\delta} \overset{\text{א}}{\le} n^{-C/6\delta}$$

א. כי אם נחלק ב-6, נקטין את החזקה, ובגלל שהיא שלילית זה מגדיל את הביטוי.

סעיף ב: צ"ל:

$$\mathbb{P}[v \notin \Gamma_G(S) \mid v \notin S] \le n^{-3C}$$

נקרא למאורע הזה A. עבור $v \notin S$, נחשב את ההסתברות שאין לו אף שכן ב-S.

לכל $u \in N_G(v)$, ההסתברות שהוא לא ב-S היא:

$$1 - \frac{3C\ln n}{\delta n}$$

וניזכר ש- $\delta(G) \ge \delta n$, אז יש ל-v לפחות δn שכנים. כלומר ההסתברות שאין אף שכן של v ב-S (לפי חסם איחוד) היא לכל היותר:

$$\left(1 - \frac{3C\ln n}{\delta n}\right)^{\delta n} \le \left(\exp\left(-\frac{3C\ln n}{\delta n}\right)\right)^{\delta n} = \exp\left(-\delta n\frac{3C\ln n}{\delta n}\right) = \exp(-3C\ln n) = n^{-3C}$$

סעיף ג: ההסתברות שהאלגוריתם נכשל היא:

$$\mathbb{P}\left[|S| > \frac{6C\ln n}{\delta} \quad \vee \quad \big(S \cup \Gamma_G(S) \ne V(G)\big)\right]$$

את החלק הראשון כבר חסמנו בסעיף א: $\mathbb{P}\left[|S| > \frac{6C\ln n}{\delta}\right] \le n^{-C/6\delta}$. ומכיוון ש- $\delta \le 1$, נקבל:

$$n^{-\frac{C}{6\delta}} \le n^{-\frac{C}{6}}$$

אנחנו רוצים שההסתברות כולה תהיה קטנה מ- $2n^{-C/6}$, אז נצטרך לחסום את החלק השני: צריך שהוא יהיה קטן מ- $n^{-C/6}$.

וכבר יש לנו מסעיף ב את ההסתברות שקודקוד מסויים הוא בעייתי. אז לפי חסם איחוד:

$$\mathbb{P}[S \cup \Gamma_G(S) \ne V(G)] \le n \cdot n^{-3C} = n^{1-3C}$$

ועבור C מספיק גדול, נקבל: $-\frac{C}{6} \geq 1 - 3C$, ואז: $n^{1-3C} \leq n^{-C/6}$, כנדרש.

סעיף ד: הגודל של S חסום ב- $\frac{6C \ln n}{\delta}$. מספר הצביעות האפשריות שנצטרך לבדוק הוא לכל היותר:

$$3^{\frac{6C \ln n}{\delta}} = 3^{O(\ln n)} = 3^{O(\log_3 n)} = O(n)$$

וכל צביעה אפשר לבדוק בזמן $O(n^2)$ (פשוט עוברים על כל הצלעות).

שאלה 2

סעיף א: נתאר את האלגוריתם:

כל עוד קיים בגרף קודקוד בדרגה לפחות $\sqrt{n}$: נצבע אותו בצבע אחד, ואת כל השכנים שלו בצבע אחר. מכיוון שאין משולשים, כל השכנים שלו זרים אז את כולם אפשר לצבוע באותו צבע. נסיר את הקודקוד והשכנים שלו. ונבדוק אם יש עוד קודקוד בדרגה לפחות $\sqrt{n}$.

אפשר לעשות לכל היותר $\sqrt{n}$ איטרציות, כי אחרי $\sqrt{n}$ איטרציות הסרנו n קודקודים (שזה כל הגרף). אז החלק הזה לוקח לכל היותר $2\sqrt{n}$ צבעים.

ברגע שאין קודקוד בדרגה $\sqrt{n}$, אפשר לעשות צביעה חמדנית על הגרף ב- $\sqrt{n}$ צבעים.

סעיף ב: אינדוקציה על $\chi(G)$. ראשית, נשים לב שכל גרף G שמקיים את התכונה יהיה עם לפחות שני קודקודים.

בסיס: עבור גרף G כך ש- $\chi(G) = 1$, הגרף הוא רק קודקודים מבודדים. אז אם קיימת צביעה חוקית כך שיש שני קודקודים לפחות מכל צבע, ברור שאם נצבע הכל באותו צבע אז יהיו לפחות שני קודקודים מאותו צבע.

צעד: נניח שהתכונה מתקיימת עבור כל גרף שמקיים $\chi(G) < \chi$ עבור χ קבוע כלשהו, ויהי גרף G כך ש- $\chi(G) = \chi > 1$.

נניח שקיימת עבורו צביעה חוקית ב-t צבעים כך שיש לפחות שני קודקודים מאותו הצבע (בוודאות קיים, במקרה הגרוע $t = 1$).

מכיוון ש- $\chi(G) = \chi$, מתקיים $t \geq \chi$.

אנחנו צריכים להוכיח שקיימת עבורו צביעה ב-χ צבעים כך שיש לפחות 2 קודקודים מכל צבע.

תהי f, χ-צביעה של G. ותהי h, t-צביעה של G כך שיש לפחות שני קודקודים באותו צבע. אם $t = \chi$, סיימנו. נניח $t > \chi$. אז $t \geq 3$.

יש לפחות 3 צבעים ולפחות שני קודקודים מכל צבע. אז יש לפחות 6 קודקודים בגרף.

אם ל- f יש לפחות 2 קודקודים מכל צבע, סיימנו. אז נניח שיש צבע שמופיע רק בקודקוד אחד, נקרא לקודקוד הזה x. נגדיר:

$$S \coloneqq \{v \in V(G) : h(v) = h(x)\}$$

כל הקודקודים שב-h מקבלים את הצבע שבעייתי ב-f. מתקיים ש- $|S| \geq 2$, לפי ההנחה על h שיש לפחות שני קודקודים באותו צבע.

נתבונן ב- $G' \coloneqq G - S$. מכיוון שהורדנו מחלקת צבע שלמה של h, מתקיים $\chi(G') \leq \chi(G) - 1$.

ומכיוון ש- $\chi(G) > 1$, יש קודקודים שעדיין קיימים ב-G'. וגם, כל הצבעים (של h) שנשארו, מופיעים לפחות פעמיים ב-G'.

אז לפי הנ"א, יש ל-G' צביעה ב- $\chi(G')$ צבעים כך שיש לפחות שני קודקודים מאותו הצבע.

אם נוסיף את S בחזרה ונצבע אותה בצבע חדש, נקבל שלצבע הזה יש לפחות שני קודקודים.

בסה"כ קיבלנו $\chi(G)$-צביעה שבה כל צבע מופיע לפחות בשני קודקודים, כנדרש.

סעיף ג:

עבור גרף G, נגדיר $\bar{G}$ את הגרף המשלים: $\bar{G} \coloneqq \left(V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)\right)$.

צ"ל: לכל גרף G, מתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq v(G) + 1$$

נוכיח באינדוקציה על $n \coloneqq v(G)$.

בסיס: עבור $n = 1$, מתקיים

$$\chi(G) = \chi(\bar{G}) = 1 + 1 \leq v(G) + 1$$

צעד: נניח שהטענה מתקיימת לכל גרף על פחות מ-n קודקודים.

יהי גרף G על n קודקודים.

נבחר קודקוד v כלשהו ונגדיר $G' \coloneqq G - v$. אזי לפי הנ"א, $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq n$.

נחזיר את v. אנחנו רוצים שיתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$$

נשים לב שהורדת קודקוד אחד מורידה לכל היותר מחלקת צבע אחת (בצביעה האופטימלית).

אז $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$ וגם $\chi(\bar{G}) \leq \chi(\overline{G'}) + 1$.

ונשים לב שכדי שיתקיים

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) > n + 1$$

זה מחייב ש $\chi(G) = \chi(G') + 1$ וגם $\chi(\bar{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$,

כי אז $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = \chi(G') + 1 + \chi(\overline{G'}) + 1 = \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 2$,

ולפי הנ"א אנחנו יודעים ש $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq n$, כלומר נקבל $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 2$.

אם $\chi(G) = \chi(G') + 1$ (*) אז נקבל ש $\deg_G(v) \geq \chi(G')$ (כי זה אומר ש-v מחובר ללפחות קודקוד אחד מכל מחלקת צביעה).

ואם $\chi(\bar{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$ (**), אז נקבל ש $\deg_{\bar{G}}(v) \geq \chi(\overline{G'})$.

ואז, נקבל $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = n - 1$.

(הקודקודים שיש ל-v צלע אליהם ועוד הקודקודים שאין ל-v צלע אליהם זה בדיוק $n - 1$).

אחרת, נוכל להניח ש $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$, כנדרש.

שאלה 3

סעיף א:

נוכיח משני כיוונים: בכיוון $OPT \geq OPT_R$, מעגל הוא סוג של הילוך סגור. אז פתרון *TSP-tour* הוא גם *TSP-walk*. אז המחיר של ה- *TSP-walk* האופטימלי הוא לכל היותר המחיר של ה- *TSP-tour* האופטימלי.

בכיוון השני, נוכיח ש $OPT \leq OPT_R$. יהיו פתרונות אופטימליים לבעיית *MTSPR* ובעיית *MTSP*: הילוך W במשקל OPT_R ומסלול P במשקל OPT.

בהילוך, בכל צלע שחוזרים עליה, בפרט חוזרים על הקודקודים שלה. אז אם יש צלע שחוזרים עליה, נגיע לקודקוד לפני הצלע.

נלך על ההילוך עד שנגיע לקודקוד הראשון שחוזרים עליו. נסמנו u. ההילוך הוא:

$$\dots, u, \dots, t, u, v$$

נוכל לעשות קיצור דרך $t \to v$ במקום $t \to u \to v$. ובגלל שאנחנו בבעיה המטרית, אי"ש המשולש מתקיים. אז זה רק מוריד את המשקל. ונוכל לעשות את זה בכל קודקוד שחוזרים עליו, עד שנקבל מעגל קל יותר. אז יש פתרון מעגל במשקל לכל היותר OPT_R. כלומר $OPT \leq OPT_R$, כנדרש.

סעיף ב:

נניח שיש אלגוריתם A שהוא c-מקרב עבור בעיית *MTSPR*. ונבנה אלגוריתם c-מקרב עבור בעיית *GTSPR*.

בהינתן בעיית *GTSPR*, נגדיר מרחקים חדשים: המרחק בין כל 2 קודקודים הוא המרחק הקצר ביותר האפשרי ביניהם בבעיה המקורית. המרחקים החדשים האלה מהווים מטריקה. נמצא פתרון c-מקרב ע"י A, ובבעיית ה-*GTSPR* ניקח את המסלול המתאים לכל צלע. המשקלים של הפתרונות זהים.

סעיף ג:

אלגוריתם *Christofides* נותן 1.5-קירוב לבעיית *MTSP*. לפי סעיף א, הפיתרון האופטימלי לבעיית *MTSP* שווה במשקל לפתרון של *MTSPR*. אז זה אלגוריתם 1.5-מקרב לבעיית *MTSPR*. ולפי סעיף ב, זה אומר שקיים אלגוריתם 1.5-מקרב עבור *GTSPR*.

שאלה 4

סעיף א:

בהינתן פסוק *3-CNF* כלשהו φ, עם m פסוקיות ו-n משתנים. נתאר בעיית *IP*:

נגדיר $2n$ משתנים – לכל משתנה z ב-φ נגדיר שני משתנים (ליטרלים): $x_z, x_{\bar{z}}$.

נגדיר מטריצה $A_\varphi \in \{0,1\}^{(n+m)\times 2n}$. ווקטור $b \in \{-1,1\}^{n+m}$. הווקטור פתרון יהיה $x \in \{0,1\}^{2n}$.

נתאר את הדרישות ע"י אי-שוויונות:

עבור פסוקית $(x_i \vee x_j \vee x_k)$ נדרוש: $x_i + x_j + x_\ell \geq 1$. זה צריך להיות בכיוון ההפוך, אז נדרוש: $-x_i - x_j - x_\ell \leq -1$.

עבור משתנה z, נדרוש: $x_z + x_{\bar{z}} \leq 1$ (שאין מצב ששניהם 1) וגם $x_z + x_{\bar{z}} \geq 1$ (שאין מצב ששניהם 0) כלומר $-x_z - x_{\bar{z}} \leq -1$.

סעיף ב:

נעשה רדוקציה מ- *3-COL* ל- *MAX-3-CUT*.

$$f(G) \coloneqq \big(G, e(G)\big)$$

כיוון ראשון: נניח ש-G 3-צביע. כלומר, יש 3 מחלקות צבע שכל אחת מהן היא קבוצה בת"ל של קודקודים. אז כל הצלעות שיש בגרף עוברות בין המחלקות האלה. אז ניקח את מחלקות הצבעים ל- V_1, V_2, V_3 ויש $e(G)$ צלעות ביניהן.

כיוון שני: נניח שאפשר לחלק את G ל-3 קבוצות של קודקודים כך שיש $e(G)$ צלעות בין הקבוצות. זה אומר שכל הצלעות בגרף הן בין הקבוצות, אז כל קבוצה היא בת"ל בעצמה. אז הקבוצות האלה מגדירות 3-צביעה.